Exercices corrigés

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unité 1 cm sur Ox et $0,5$ cm sur Oy.

Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

1. (a) Déterminer f', la fonction dérivée de f.
   (b) Établir le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
3. Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$

Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3, 4]$ par

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$$

1. (a) Déterminer la fonction dérivée g'.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3, 4]$.
   (c) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3, 4]$ (Justifier).
   On note α la plus grande de ces solutions.
   (d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
3. Tracer la courbe C_g dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

Correction de l'exercice 1

Partie A

1. (a) On trouve $f'(x) = 3x$

   (b) d'où le tableau de variations :

x	-3		0		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	23

2. On a $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f'(-1) = -3$ d'où l'équation de la tangente cherchée est :
   $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -3(x+1) + \frac{1}{2} = -3x - \frac{5}{2}$

3. Voir graphe

Partie B

1. (a) Le calcul de la fonction dérivée donne $g'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

   (b) Pour déterminer le signe de $g'(x)$, on calcule le discriminant Δ, ici égal à 81, ce qui nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
   Or, un polynôme du second degré est du signe de a (ici négatif) sauf entre les racines d'où le tableau de variations de g :

x	-3		-1		2		4
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g	$\frac{43}{2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-17

   (c) g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ avec $g(-3) > 0$ et $g(-1) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-3; -1]$.
   g est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$ avec $g(-1) < 0$ et $g(2) > 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-1; 2]$.
   g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur l'intervalle $[2; 4]$.
   Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[-3; 4]$.

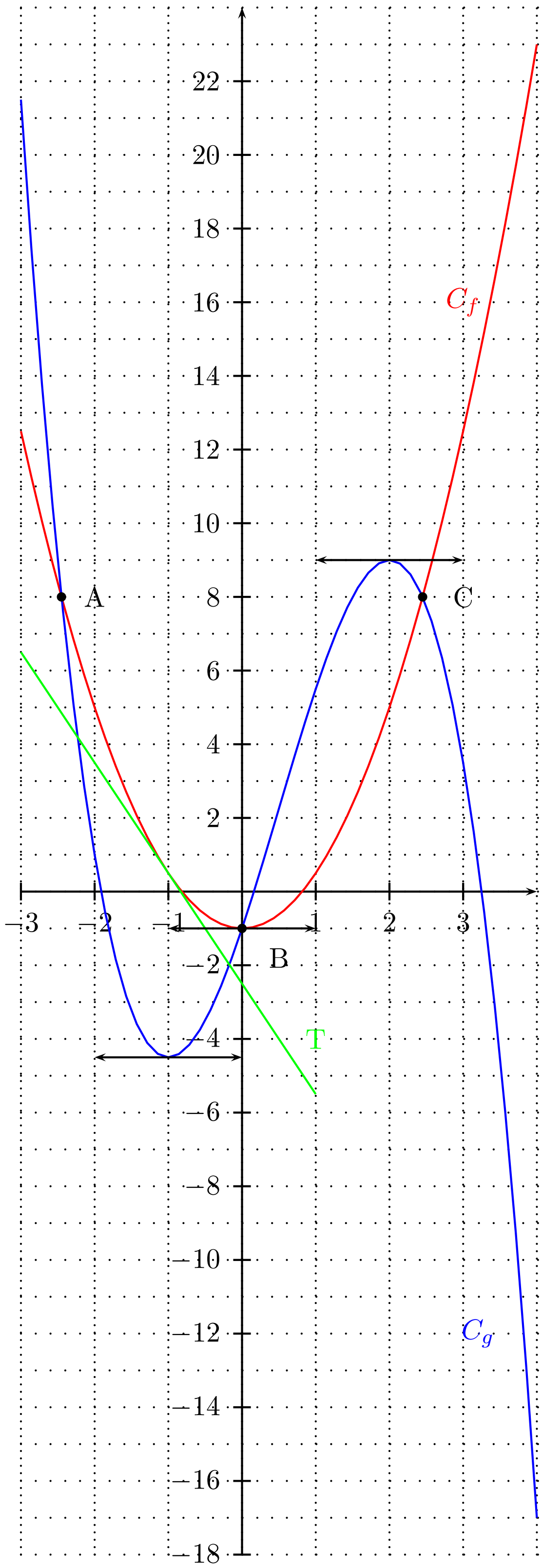
   (d) α appartient à l'intervalle $[2; 4]$, de plus, $g(3) = 3,5$ qui est positif. On fait donc une table de valeurs avec la calculatrice avec des valeurs allant de 3 à 4 par pas de $0,1$.
   On trouve $g(3,2) = 0,79 > 0$ et $g(3,3) = -0,80 < 0$ donc : $3,2 < \alpha < 3,3$.
   On réitère le même procédé cette fois-ci sur l'intervalle $[3,2; 3,3]$ par pas de $0,01$.
   On obtient $g(3,25) = 0,02 > 0$ et $g(3,26) = -0,14 < 0$ donc : $3,25 < \alpha < 3,26$.

2. Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

   On obtient alors pour x : $\frac{3}{2}x^2 - 1 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \Longleftrightarrow -x^3 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x(-x^2 + 6) = 0$ d'où les solutions : $x = 0$, $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$

   Les points d'intersection sont donc les points : $A\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.



Exercice 2.

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.
- $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.
   (b) En déduire les limites de f en 2^+ puis en 2^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.
- $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.
   (b) En déduire les limites de f en 1^+ puis en 1^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Solution de l'exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par :

– $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.

– $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = x\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1}$$

On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

(b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?
Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?
Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :

$$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

(b) En déduire les limites de f en 2^+ puis en 2^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 2$ on a $2-x < 0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-$$

De plus $\lim_{x\to 2^+} x^2 - x + 1 = 4-2+1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

De même, lorsque $x < 2$ on a $2-x > 0$ donc :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+$$

De plus $\lim_{x\to 2^-} x^2 - x + 1 = 4-2+1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \neq 2$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2-x)-(-1)\times(x^2-x+1)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2-2+x+x^2-x+1}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
Pour tout $x \neq 2$, $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+4x-1$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.
$\Delta = 16-4 = 12$, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2+\sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

(c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2-\sqrt{3})$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$f(2+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$

Solution de l'exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x)=\dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$ pour $x\neq 1$.
- $g(x)=\dfrac{\cos x+1}{x}$ pour $x\neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

   On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{-1}{1}=-1$$

   Et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par produit on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

   De même comme $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?

   Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x>0$ on a :

$$0\leq g(x)\leq\frac{2}{x}$$

$$\forall x>0,\qquad -1\leq\cos x\leq 1\Longleftrightarrow 0\leq\cos x+1\leq 2\Longleftrightarrow 0\leq\frac{\cos x+1}{x}\leq\frac{2}{x}$$

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

   On a $\lim_{x\to+\infty}0=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?

   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.

   On refait la même chose mais pour $x<0$, ce qui donne :

$$\forall x<0,\qquad -1\leq\cos x\leq 1\Longleftrightarrow 0\leq\cos x+1\leq 2\Longleftrightarrow 0\geq\frac{\cos x+1}{x}\geq\frac{2}{x}$$

   On a $\lim_{x\to-\infty}0=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$$

   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

(b) En déduire les limites de f en 1^+ puis en 1^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.

D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 1$ on a $x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 1^+} x - 1 = 0^+$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^+} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

De même, lorsque $x < 1$ on a $x - 1 < 0$ donc :

$$\lim_{x\to 1^-} x - 1 = 0^-$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.

Pour tout $x \neq 1$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-1) - 1 \times (-x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + x - 1 + x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x-2$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, ce polynôme n'admet pas de racine donc il est de signe constant. Ici on a pour tout $x \neq 1$, $-x^2 + x + 1 < 0$. On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	

(c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Etude de la fonction *f*

1) a) Trouver les limites de *f* en + ∞ et en - ∞.
   b) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.
2) a) Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Etudier la position de T par rapport à $\mathscr{C}$.
3) Tracer T et la courbe $\mathscr{C}$.

Solution de l'exercice 4

Etude de la fonction f

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} - 1$

avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+		–	
f(x)	-2	↗	$\sqrt{2} - 1$	↘	0

$f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$

2) a) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Une équation de T est donc $y = x$.

b) $f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} > 1 \Rightarrow x^2 + 1 < 1 \Rightarrow x^2 < 0$

Impossible car un carré est toujours positif.

Donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ pour tout x réel.

$f(x) - x$ est donc du signe de $-(x + 1)$

Si $x < -1$ alors $f(x) - x > 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de T.

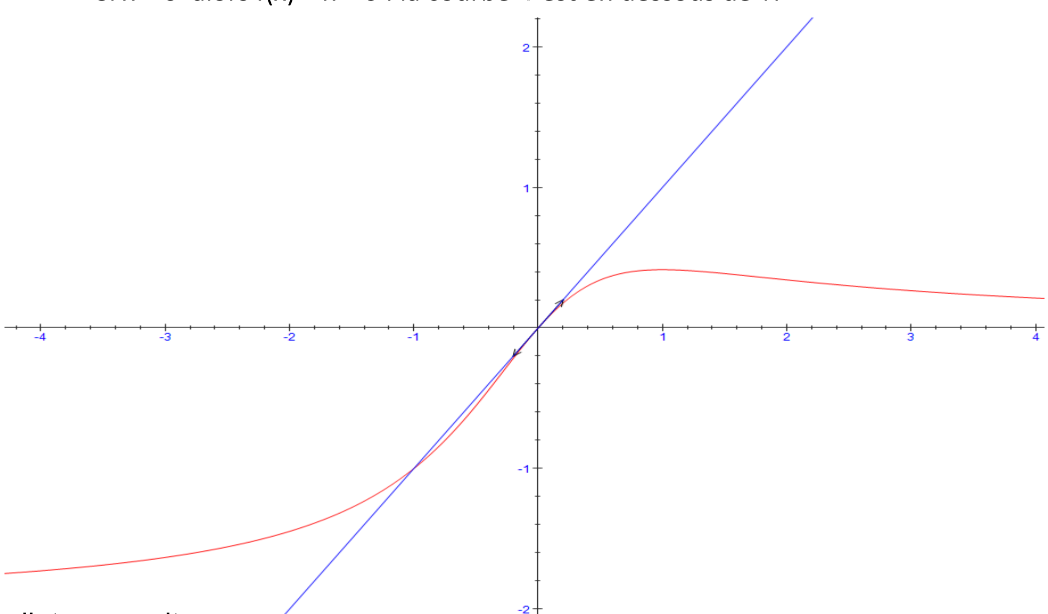
Si $x = -1$ alors $f(x) = x$: la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (-1 ;-1)

Si $-1 < x < 0$ alors $f(x) - x < 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

Si $x = 0$ alors $f(x) = x$: la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (0 ;0)

Si $x > 0$ alors $f(x) - x < 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

3)



Exercice 5

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = [0 ; $\frac{\pi}{4}$] par $g(x) = tan(x) - x$.

a) Etudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
b) Montrer que, pour tout x de I, on a $0 \leq tan(x) \leq 1$.
c) On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = tan(x) - 2x$. Montrer que la dérivée de h peut s'écrire $h'(x) = tan^2(x) - 1$. Etudier les variations de h et en déduire son signe .

2. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.

a) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$. En déduire le signe de f' .
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et en déduire son signe.
c) Montrer que, pour tout x de I, on a $x \leq tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{tan\, x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$.

Solution de l'exercice 5

1. a) La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $g'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 = tan^2(x)$ est positif ; donc la fonction g est croissante sur I et comme $g(0) = 0$, la fonction g est positive sur I.

b) Pour tout x de I, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cos(x) \leq 1$ donc $1 \leq \frac{1}{cos(x)} \leq \sqrt{2}$ et $0 \leq sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \leq tan(x) \leq 1$.

c) La fonction h est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $h'(x) = tan^2(x) + 1 - 2 = tan^2(x) - 1$; d'après la question précédente, $h'(x)$ est négative et donc h est décroissante sur I ; de plus, $h(0) = 0$, donc h est négative sur I.

2. a) La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = tan^2(x) - 4x^2$; donc $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$; d'après les questions précédentes, $tan(x) - 2x \leq 0$ et $tan(x) + 2x \geq 0$ donc $f'(x)$ est négative et donc f est décroissante sur I ; de plus, $f(0) = 0$, donc f est négative sur I.

b) Le tableau de variations de f : (Le signe de f sur I : $f(x) \leq 0$)

x	0 $\pi/4$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ $f(\pi/4)$

c) Pour tout x de I, on a $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$, donc $x \leq tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Pour tout x de I, on a $0 \leq tan(x) - x \leq \frac{4x^3}{3}$ et si $x \neq 0$, $0 \leq \frac{tan(x) - x}{x^2} \leq \frac{4x}{3}$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{4x}{3} = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{tan\, x - x}{x^2} = 0$. La fonction tangente est dérivable sur I, donc

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$ est le nombre dérivé de $tan(x)$ en $\frac{\pi}{4}$, car $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = tan'(\frac{\pi}{4}) = tan^2(\frac{\pi}{4}) + 1 = 2$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel x, $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.
Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1), puis avec la droite (d_2).
3. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) En déduire le sens de variations de la fonction f.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
4. a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
b) Tracer (d_1), (d_2) et la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$?

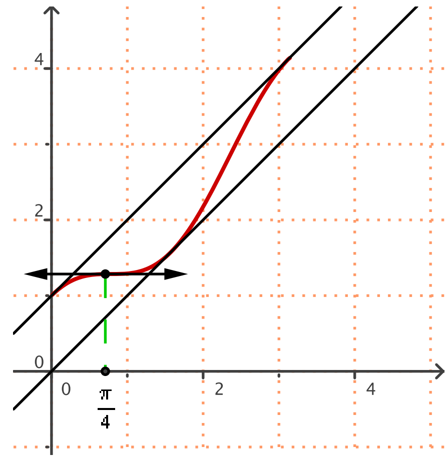
Solution de l'exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.
1. a) Pour tout réel x, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$, et $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.
b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.
2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_2) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.
3. a) La fonction f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de u^2 est $2uu'$. D'où, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) On sait que, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant -\sin(2x) \leqslant 1$, et $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$. Donc la dérivée est positive et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	1	↗	$\pi + 1$



b) Représentation graphique de f sur $[0; \pi]$:

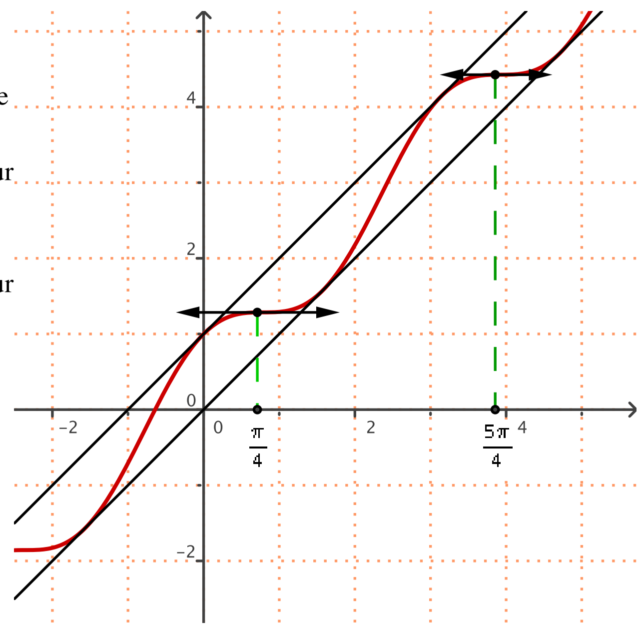
5. a) Pour tout réel x, on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x)$ car $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C.

Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, le point de la courbe d'abscisse $(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur $[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i} + \pi\vec{j} = \pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi\vec{i} + k\pi\vec{j}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2. a) Montrer que pour tout réel x de D_f, $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe C_f.

3. Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1:

a) Montrer que $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} - 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$. La fonction f est-elle dérivable en -1 ?

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de dérivabilité.

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

6. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, -1, 1 et 2.

Solution de l'exercice 7

1.l'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2-1 \geqslant 0$. Soit $x^2 \geqslant 1$, soit $x \in]-\infty\,;-1] \cup [1;+\infty[$. Donc $D_f =]-\infty\,;-1] \cup [1;+\infty[$.

2. a) Pour tout réel x de D_f , $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à C_f , on étudie $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)$. On peut écrire $\sqrt{x^2-1}+x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{f(x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1:

a) Pour $x < -1$: $x-1 < 0$, d'où $-x+1 > 0$ et $-x-1 > 0$. Ainsi $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \dfrac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{-x+1}{-x-1}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1$. D'où $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-1}(x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en -1.

b) Pour $x > 1$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1$.

D'où $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 1.

5. a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\cup]1;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

D'où $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:

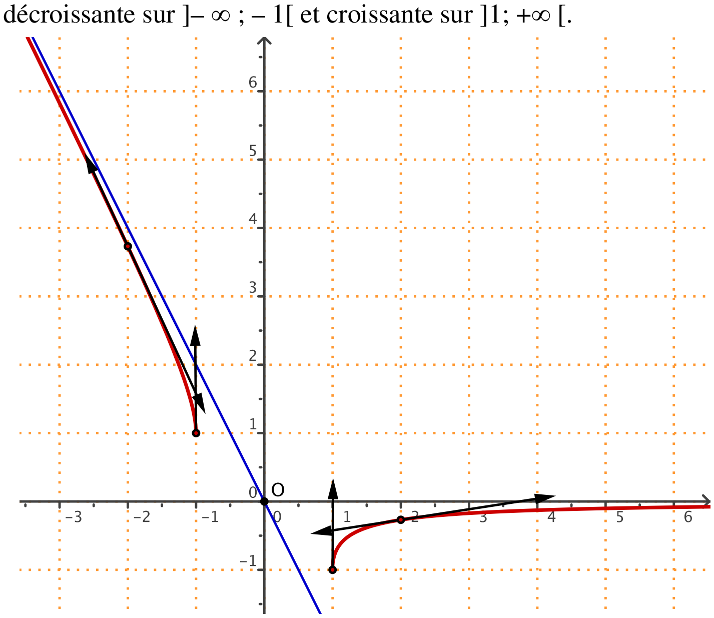
Si $x < -1$, x et $-\sqrt{x^2-1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leqslant 0$.

Si $x > 1$, on a $0 \leqslant x^2-1 \leqslant x^2$, donc $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$; et $x-\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

b) Le tableau de variations de f sur D_f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	Non définie	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	Non définie	-1	$\nearrow$	0

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, -1, 1 et 2:



Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f.

b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Solution de l'exercice 8

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.

2. D_f est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

3. Comme f est paire, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc en utilisant les limites de fonctions composées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C , on étudie la limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. D'où la dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui est du signe de x . La fonction f est donc décroissante dur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Le tableau de variations de f sur D_f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

7. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 .$$

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 1 = 1$, soit $x^2 = 0$. La seule solution est 0.

Exercice 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Montrer que pour $x \in \left]-\infty ; 1\right[$, $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

4. Étudier les variations de f sur l'ensemble $\left]-\infty ; 1\right[\cup \left]3; +\infty\right[$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de f.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
3. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
4. Déduire des questions 1 et 3 que $\lim\limits_{x\to -\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
5. Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction f ?

Solution de l'exercice 9

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

Le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $x^2 - 4x + 3$ est positif pour les valeurs à l'extérieur des racines; soit $D_f = \left]-\infty ; 1\right] \cup \left[3; +\infty\right[$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ en utilisant la propriété: la limite d'un polynôme à l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$.

3. a) Pour $x \in \left]-\infty ; 1\right[$, $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$, d'où $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1) = 0^{-¿}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-3) = -2$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}} = +\infty$, et la fonction f n'est pas dérivable en 1.

4. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;1[\ \cup\ ]3;+\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.

On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ qui est du signe de $x-2$ puisque le dénominateur est strictement positif. Ainsi la fonction f est

Étudier les variations de f sur l'ensemble $]-\infty\,;1[\ \cup\ ]3;+\infty[$.

5. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1	3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. On a $f(x)-(x-2) = \sqrt{x^2-4x+3}-(x-2) =$

$$\frac{x^2-4x+3-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$,

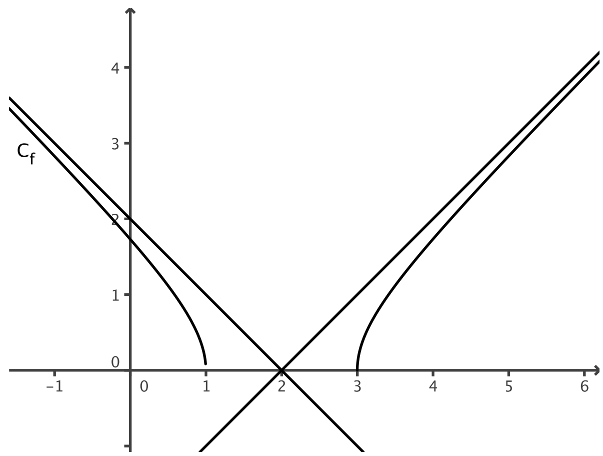
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = 0$. Ainsi, la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

De même, On a $f(x)-(-x+2) = \sqrt{x^2-4x+3}+x-2 =$

$$\frac{x^2-4x+3-(-x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right) = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = -x+2$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.



solution de l'exercice 10

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $-x$ appartient $\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x\sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ car la fonction sinus est impaire. Donc la fonction f est paire.

2. On sait que pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$; et $-x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\dfrac{\sin X}{X} = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$.

4. Comme la fonction f est paire et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

5. La courbe C représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f.
3. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1.

b) Déterminer l'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses.

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.

Déterminer l'aire du triangle AHB.

Cette aire dépend-elle de a ?

Exercice12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. a) Trouver tous les polynômes du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0.

b) Parmi ces polynômes, en existe-t-il un qui passe par le point A de coordonnées (2; 1) ? Justifier la réponse.

7. Représenter graphiquement à l'aide de Geogebra, la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme (s'il existe de la question 6. b).

Solution de l'exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$; On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$;

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1) = 0^+$; On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1) = 0^-$;

2. Pour étudier les variations de f, on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

3. a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1 est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \dfrac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L''abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations

$y = 0$ et $y = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$; soit $-x + 2a + 1 = 0$, d'où $x = 2a + 1$.

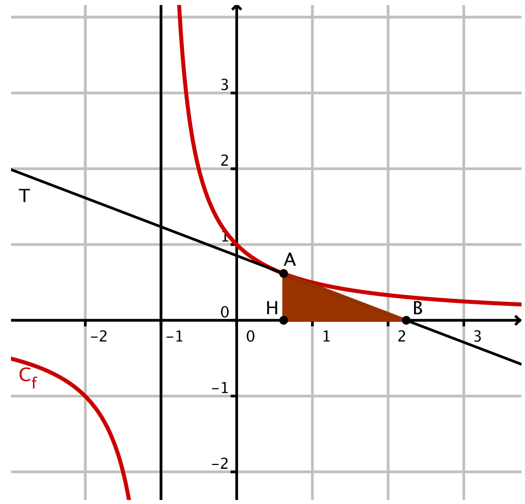
Donc B$(2a + 1; 0)$.

c) Si H le projeté orthogonal de A$(a; f(a))$ sur l'axe des abscisses, alors H$(a; 0)$.

Le triangle AHB est rectangle en H, donc l'aire du triangle

AHB $= \dfrac{\text{HA}\times\text{HB}}{2} = \dfrac{|f(a)|\times|2a+1-a|}{2} = \dfrac{|1/(a+1)|\times|a+1|}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Cette aire est invariante pour tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



Solution de l'exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$:

on obtient $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour étudier les variations de f, on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette dérivée dépend du signe du numérateur : $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel x, $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C, ici en $-\infty$, il faut montrer que la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = 0$.

Or $f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$

$\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

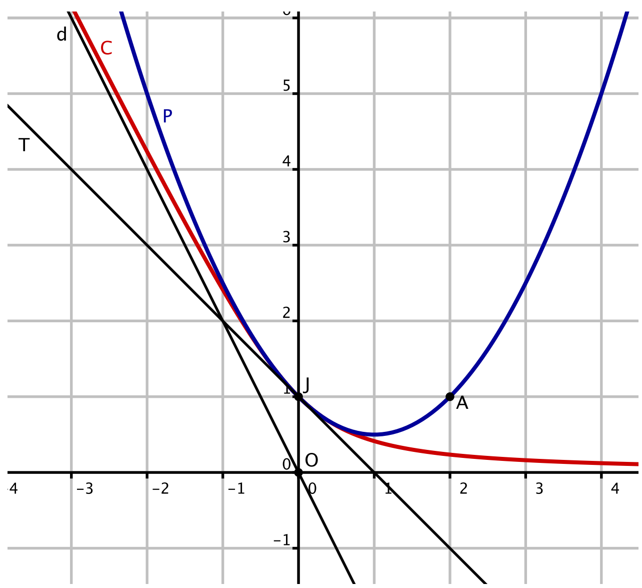
On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$, et la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5.Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$.

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient $P(0) = f(0) = 1$ et $P'(0) = f'(0) = -1$.
Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc $P(0) = c = 1$ et $P'(x) = 2ax + b$,
soit $P'(0) = b = -1$. Donc $P(x) = ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées (2; 1) si $P(2) = 1$,
soit $P(x) = 4a - 2 + 1 = 4a - 1 = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2}$.

7. Représentation graphique de la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme de la question 6. b).



Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-6}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a) Déterminer des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C.

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

Exercice 14

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

Solution de l'exercice 13

1. On utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

On a $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$ par quotient de limites.

On a $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$ par quotient de limites.

2. Pour étudier les variations de la fonction f , on détermine la fonction dérivée de f :

$f'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2-6)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$.

Le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur: on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 6 = 16 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{2\times 2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{16}}{2\times 2} = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 2 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

4. a) On a $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2} = \frac{2x^2-6}{x-2}$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b - 2a = 0$ et $-2b + c = -6$; et on trouve $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

Donc, pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x-2}$.

b) Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$, on montre que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$: On a $f(x) - (2x + 4) = \frac{2}{x-2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(2x+4)) = 0$. On montre de même que la droite est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 3$.

6. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(x) = 0$, soit $2x^2 - 6 = 0$ équivaut à $2(x^2 - 3) = 0$ équivaut à $x^2 - 3 = 0$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont ($\sqrt{3}$; 0) et ($-\sqrt{3}$; 0).

Solution de l'exercice 14

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$, on détermine $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$. On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$ par somme de limites, et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$, donc la droite d'équation $y = 2x$ n'est pas asymptote à C en $-\infty$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1$ (il suffit de calculer $f(0)$).

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^+ \setminus\{1\}$, $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Ainsi $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$, et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$.

Exercice 15

On considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse x.

<u>PARTIE A</u>

Pour tout réel x, on note $f(x)$ la distance OM.

1. Expliciter la fonction f et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étudier les variations de f.
5. Préciser les extremums de la fonction f et en quelles valeurs de x ils sont atteints.
6. Faire la représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction f.

<u>PARTIE B</u>

Pour tout réel x, on note $g(x)$ le coefficient directeur (lorsqu'il existe) de la droite (OM).

1. Expliciter la fonction g et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ représentative de la fonction g ?
4. Étudier les variations de g.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
6. Montrer que la courbe Γ admet une asymptote oblique (d), que l'on précisera.
7. Étudier la position relative de Γ et de (d).
8. A l'aide d'un logiciel, faire la représentation graphique de Γ et des asymptotes.

Facultatif : Existe-t-il des positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM) ?

Solution de l'exercice 15

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse x.

PARTIE A : Pour tout réel x, on note $f(x)$ la distance OM.

1. La distance OM = $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
Le polynôme $x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$, donc ne s'annule pas et est toujours du signe de $a = 1$, donc strictement positif. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Étude de la parité de la fonction f : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = f(x)$; donc la fonction f est paire.
3. Les limites de la fonction f : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$ car la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par la limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, et par la parité, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. Les variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;
et $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ qui est du signe du numérateur; $2x^2 - 1 = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$. D'où le tableau de signes de f' et les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$			
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

5. Le maximum local de f est 1 atteint en $x = 0$; le minimum est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.
6. La représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction f :

PARTIE B :

1. Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\dfrac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \dfrac{1 - x^2}{x} = g(x)$ qui est défini sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étude de la parité de la fonction g : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$g(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{-x} = \dfrac{1 - x^2}{-x} = -g(x)$; donc la fonction g est impaire.
3. La fonction g est une fonction rationnelle, donc la limite en l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x^2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Par la parité, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$.
On peut déduire que la courbe Γ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
4. Les variations de g : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables ;
et $g'(x) = \dfrac{(-2x)(x) - (1 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{x^2}$ qui est du signe du numérateur qui est strictement négatif. Donc, la

fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

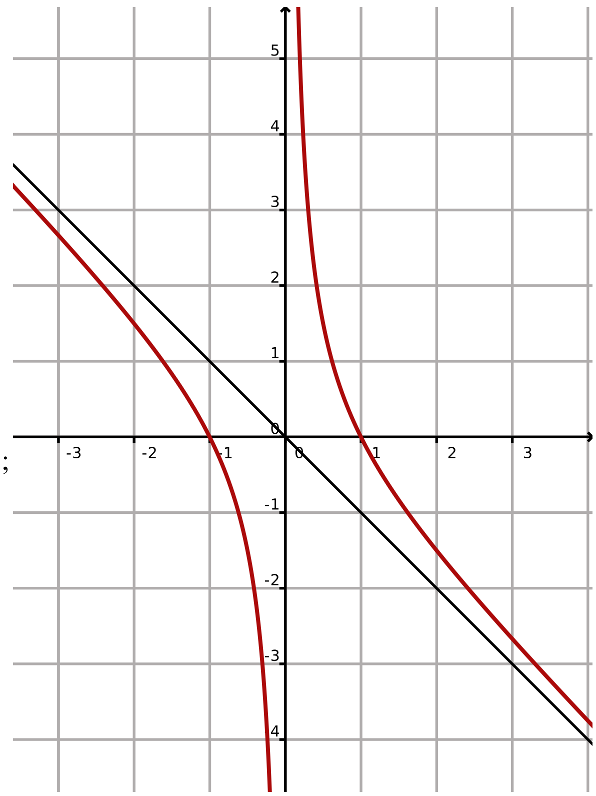
5. Le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

6. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{1}{x} - x$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe Γ .

7. Pour étudier la position relative de Γ et de (d) on étudie le signe de la différence $g(x) - (-x) = \dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ et strictement négatif sur $]-\infty;0[$. Donc la courbe est au-dessus de la droite (d) sur $]0\,;+\infty[$ et est en-dessous de la droite sur $]-\infty;0[$.

8. La représentation graphique de Γ et les asymptotes :



BONUS : Pour trouver les positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM), il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, soit $\sqrt{x^4-x^2+1} = \dfrac{1-x^2}{x}$;

on élève au carré : $x^4 - x^2 + 1 = \dfrac{1-2x^2+x^4}{x^2}$, soit

$x^6 - x^4 + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, soit $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

On considère la fonction h définie par

$h(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1$.

C'est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $h'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x = 2x(3x^4 - 4x^2 + 3)$.

Le polynôme $3x^4 - 4x^2 + 3 = 3X^2 - 4X + 3$, en posant $X = x^2$; le discriminant est égal à $(-4)^2 - 433 = -20 < 0$, donc le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la dérivée h' est du signe de x, et la fonction h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$. Elle atteint un minimum lorsque $x = 0$, qui vaut $h(0) = -1$;

de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

Ainsi, la fonction h s'annule en deux valeurs $x_1 \simeq -0{,}656$ et $x_2 \simeq 0{,}656$.

Donc, il existe deux positions de M telles que la distance OM soit égale au coefficient directeur de (OM).